Fonctions convexes

I Définitions, pentes, régularité:

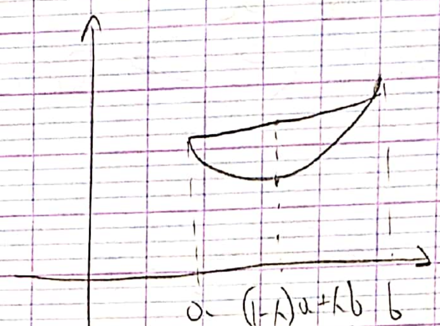
Données: I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial

$f : I \to \mathbb{R}$

si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$

Déf: On dit que la fonction f est convexe lorsque:

$\forall (a,b) \in I^2 \ \forall \lambda \in [0,1] : \quad f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$



La droite qui joint $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ a pour éq

$\Delta : x \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

$\Delta((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

Ex: Mq f est convexe $\Longleftrightarrow$ $Epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \ f(x) \leqslant y\}$ est convexe

Th (3 pentes): si $a \in I$, $b \in I$, $P_{ab}(f) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Soit $(a,b,c) \in I^3$ avec $a<b<c$, si la fct f est convexe

On a $P_{ab}(f) \leqslant P_{ac}(f) \leqslant P_{bc}(f)$

D/ on écrit $b = (1-\lambda)a + \lambda c$ / $\lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$

Cep par conv $\quad f(b) \leqslant (1-\lambda) f(a) + \lambda f(c)$

$f(b) - f(a) \leqslant \lambda (f(c) - f(a)) = \dfrac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$

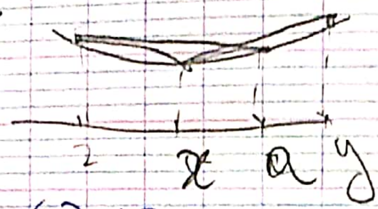
d'où $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

✓ • Expers : prouver les autres (écrire et vérifier)

Corollaire de la preuve : si f vérifie (*), elle est convexe

Cor : Si $a \in I$, $P_a \left(\begin{array}{l} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right)$ est croissante

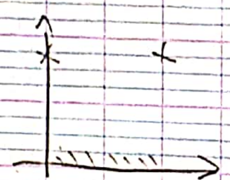
D/



$P_a(z) \leq P_{zy} \leq P_{ax} = P_a(x)$ avec le th

Régularité :

⚠ $f = 0$ sur $]0,1[$, $f(0) = f(1) = 1$
f est convexe sur $[0,1]$.



Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et a un point intérieur à I. Alors ① f possède des dérivées à droite et à gauche et

② $f'_g(a) \leq f'_d(a)$

② f est C^0 en a

D/ On regarde la fonction $x \mapsto P_a(x)$ $I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$
Comme a est intérieur à I, on peut trouver $b \in I$ tq $b > a$.
Il vient avec le th des 3 pentes, pour $x < a$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = P_a(x) \leq P_a(b)$$

Or P_a est croissante majorée sur $]-\infty, a[\cap I$

elle possède une limite en a. $\exists f'_g(a)$. De m̂ $\exists f'_d(a)$

En fait, si $x, y \in I$ et $x < a < y$, on a

$$P_a(x) \leqslant P_a(y) \left| \begin{array}{l} x \to a^- \\ y \to a^+ \end{array} \right| \quad f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$$

Continuité : à droite en a : il existe $\eta > 0$ tq $\forall x \in]a, a+\eta[$

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_d(a) \right| \leqslant 1$$

$$f(x) - f(a) \leqslant \underbrace{(1 + f'_d(a))(x - a)}_{\to 0}$$

Cor: Si la fct $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable sur I, sa dérivée f' est croissante

[Vérifier pour les extremes de I]

D/ Soit $a < b$ dans I

soit $x \in]a, b[$

il vient $f'_d(a) = f'_d(a) = \inf\limits_{y \in]a,b[} P_a(y) \leqslant P_a(x) \leqslant P_b(x)$

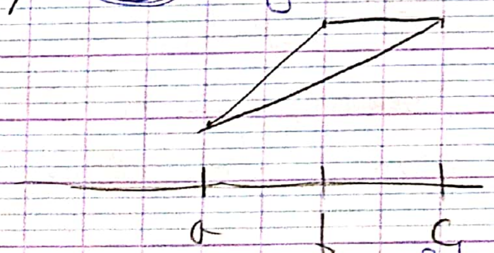
lim monotone (vérif)

$$\leqslant \sup_{y \in]a,b[} P_b(y) = f'_g(b) = f'(b)$$

✓ • Ex pers: f'_g et f'_d sont croissantes sur I

Th: Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Si f' est croissante alors f est convexe.

D/ ABS si f n'est pas convexe : $\exists a < b < c$ tq



$$P_{ab} > P_{bc}$$

TAF: $\exists a' \in]a, b[$ tq $f'(a') = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = P_{ab}$

$\exists b' \in]b,c[$ tq $f'(b') = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

De là $a' < b'$ et $f'(a') > f'(b')$, absurde

Cor : si $f \in \Delta^2(I,\mathbb{R})$, f est convexe ssi $f'' \geq 0$

D/ f est convexe $\Leftrightarrow f' \nearrow \Leftrightarrow f'' \geq 0$

th : (Pos par rapport à la tangente) Soit $f \in \Delta^1(I,\mathbb{R})$
alors $\forall a \in I\ \forall x \in I\quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

D/ Si $x < a$ $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = P_a(x) \leq \sup_{y < a} P_a(y) = f'(a)$

$$f(a) - f(b) \leq f'(a)(a-x)$$

Si $x > a$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \inf P_a(y) = f'(a)$ et donc
$f(x) - f(a) \geq f'(a)$

Conséquence : Si $f'(a) = 0$, a est argmin absolu de f
$[f(a) = \min_{x \in I} f(x)]$

II Inégalités de convexité

a- Fonctions strictement convexes

Def : La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque $\forall (a,b) \in I^2\ \forall \lambda \in]0,1[\ a < b$
$\Rightarrow f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

Dans ce cas l'inégalité des 3 pentes devient stricte

Critère ~~Caractérisation~~ : si $f \in \Delta^1(I,\mathbb{R})$ et si f' est strictement croissante, f est strictement convexe

Si $f \in \Delta^2(I,\mathbb{R})$ et si $f'' > 0$, f est strict convexe

~~⚠ g croissante $\mathcal{C}^1$ f strictement convexe si $f \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$ et si $f'' > 0$, f est strict convexe~~

⚠ g $\mathcal{D}^1$ g croissante $\Leftrightarrow g' \geq 0$ (IAF)
g strictement croissante $\Leftrightarrow g' \geq 0$ et (?)

(?) $Z(g) = \{x \in I \mid g'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide
ie $Z(g)$ ne contient aucun intervalle non trivial

$\left(F \text{ fermé non dén. } \overset{\circ}{F} = \emptyset \; ; \; f(x) = \int_0^x d(y, F)\, dy \right)$

En effet : si $[\alpha, \beta] \subset Z(g')$ avec $\alpha < \beta$, g' est nulle sur $[\alpha, \beta]$ donc g est constante sur $[\alpha, \beta]$

si g n'est pas strict. croissante : $\exists \alpha < \beta$ tq $g(\alpha) = g(b)$

donc $g|_{[\alpha,\beta]}$ est constante $[\alpha, \beta] \subset Z(g')$

b_ Inégalité fondamentale :

Th : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ $x_1 \ldots x_n \in I$
$\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tq $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$
Alors $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ (*)
si de plus f est strict. convexe et $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$
l'égalité (*) entraîne $x_1 = \ldots = x_n$

D/ Récurrence : $n = 2$, c'est la convexité de la fct f
$n \geq 3$ si $\lambda_n = 1$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ OK
On suppose $\lambda_n < 1$, d'où $1 - \lambda_n = \sum^{n-1} \lambda_i > 0$

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = f\left((1-\lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1' + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}'\right) + \lambda_n x_n\right)$$

$$\leq (1-\lambda_n) f\left(\frac{\lambda_1 x_1'}{1-\lambda_n} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1} x_n'}{1-\lambda_n}\right) + \lambda_n f(x_n)$$

(HR) $\Rightarrow$

$$\overset{(HR)}{\leq} x_1 f(x_1) + \dots + x_n f(x_n)$$

$\rightarrow$ Si f est strictement convexe :

On suppose WLOG : $x_1 \leq \dots \leq x_n$

On examine la preuve soit $x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n-1} x_{n-1}$

si $x < x_n$ il vient $f((1-\lambda_n)x + \lambda_n x_n) < (1-\lambda_n) f(x) + \lambda_n f(x_n)$

$< \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n)$

Cas d'égalité

Donc s'il y a égalité $x = x_n$

si $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux

$$f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n-1} x_{n-1}) \underset{(HR)}{<} \mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_{n-1} f(x_{n-1})$$

$\rightarrow$ inégalité stricte, donc $x_1 = \dots = x_{n-1} = x = x_n$

APPL : IAG

Soient $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^+$, On a $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$

égalité ssi $x_1 = \dots = x_n$

D/ On suppose $x_1 > 0 \dots x_n > 0$

on pose alors $y_i = \log x_i$, $i = 1 \dots n$

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} = e^{\frac{1}{n} x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{1}{n}(e^{y_1} + \dots + e^{y_n}) = \frac{1}{n} \Sigma$$

20

le cas d'égalité provient de la stricte convexité de exp.

• Ex : (Mines) (moraed) $a,b,c>0$ donnés (Sol: AMGM)

Etudier $\inf_{\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}} \left(ax+by+\frac{c}{xy}\right)$

<u>Compléments</u> : Méthode de Cauchy

Archimède : $\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1+x_2)$

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}\right) \leq \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

$$\sqrt[2^n]{x_1\cdots x_{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}(x_1+\cdots+x_{2^n})$$

Soit $N\in\mathbb{N}$ puis n : $2^n > N$

On prend $x_{N+1}=\cdots=x_{2^n}=\sqrt[N]{x_1\cdots x_N}=y$ il vient

$$\sqrt[2^n]{\underbrace{(x_1\cdots x_N)}_{y^N}\underbrace{y\cdots y}_{y^{2^n-N}}} \leq \frac{1}{2^n}\left(x_1+\cdots+x_N+(2^n-N)y\right)$$

$$y \leq \frac{2^n-N}{2^n}y+\frac{1}{2^n}(x_1+\cdots+x_N)$$

$$\frac{N}{2^n}y \leq \frac{1}{2^n}(x_1+\cdots+x_N) \qquad \sqrt[N]{x_1\cdots x_N} \leq \frac{1}{N}(x_1+\cdots+x_N)$$

Autre : $\begin{cases} x_i>0 \\ x_1\cdots x_n=1 \end{cases} \Rightarrow x_1+\cdots+x_n \geq n$ $\quad$ Suffisant $y_i \to \lambda x_i$, $\lambda=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}$

il y a au moins 1 terme ≥ 1 et 1 terme ≤ 1

On peut esc $x_1 \leq 1$ $x_2 \geq 1$

Récurrence

d'où $(1-x_1)(x_2-1) \geqslant 0$ et donc $x_1+x_2 \geqslant 1+x_1x_2$

$(x_1x_2)(x_3\cdots x_n)=1 \Rightarrow x_1x_2+x_3+\dots+x_n \geqslant n-1$ (HR)

$\Rightarrow x_1+x_2+\dots+x_n \geqslant 1+x_1x_2+\dots+x_n \geqslant n$

→ COMPLÉMENTS :

1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on suppose :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) \quad (*)$$

Mq f est convexe

S/ On montre que $\forall \lambda \in [0,1]$ dyadique on a $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$

$\lambda=\frac{1}{2}$ OK (hyp) $\lambda=\frac{1}{4}$ on veut mq $f(\underbrace{\tfrac{3}{4}a+\tfrac{1}{4}b}_{c}) \leqslant \frac{3}{4}f(a)+\frac{1}{4}f(b)$

$a \quad c \quad \frac{a+b}{2}$ $\qquad c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$f(c) \leqslant \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{3}{4}f(a)+\frac{1}{4}f(b)$$

Suite : $(1-\lambda)a+\lambda b$ $\quad \lambda=\frac{2p+1}{2^n}$, $n\geqslant 3$, $2p+1 > 2^{n-1}$

Ex (X-ENS) : On suppose $(*)$ vérifiée, et que f est bornée en tout segment. Mq f convexe (on ne suppose pas f est $\mathcal{C}^0$)

S/ Réduction du problème.

On peut supposer $x=0$ (translation sur x)

$f(0)=0$ (translation sur y)

Soit M un majorant de f sur $[-1,1]$

Pour tout $x\in[-1,1]$

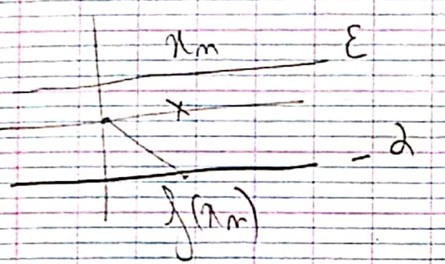
$$f(x/2)=f\left(\frac{0}{2}+\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(0)+f(x)\right)=\frac{1}{2}f(x)$$

Par récurrence trivial : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$ $f(x) \leq \frac{M}{2^n}$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n$ $\frac{M}{2^n} \leq \varepsilon$ et donc

$\exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta]$ $f(x) < \varepsilon$

Négation de la C en 0 : $\exists \alpha > 0$ $\exists (x_n) \to 0$ $\forall n$ $f(x_n) \leq -\alpha$



$\exists \alpha > 0$ $\exists (x_n) \to 0$ $\forall n$ $f(x_n) \leq -\alpha$

$f\left(\frac{-x_n + x_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_n) + f(-x_n)\right)$

$-f(x_n) \leq f(-x_n)$

$\alpha \leq f(-x_n)$ ABS

2 - Inégalité de Hölder et Minkowski

Exposants conjugués : $p > 0$ $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\forall (x_i)(y_i) \in \mathbb{R}^n$ $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$

S/ On se ramène à $x_i > 0, y_i > 0$ $i = 1 \dots n$

(i) $\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2$, $xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$

$\left.\begin{array}{l} x = e^s \\ y = e^t \end{array}\right\}$ $xy = e^{s+t} = e^{\frac{1}{p}(ps) + \frac{1}{q}(qt)} \leq \frac{1}{p}(e^s)^p + \frac{1}{q}(e^t)^q$

$= \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$

(ii) On pose $A = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $B = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$

normalisation $\left\{ \frac{x_i}{A} \times \frac{y_i}{B} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{B^q} \right.$

On sonne $\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{B^q}$

Passage aux intégrales Somme de Riemann

On peut aussi poser $A = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ $B = \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$

→ supposer $A > 0, B > 0$

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q}$$

3 - Quasi linéarisation, Minkowski

Soient L une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^0 bornée sur les fonctions bornées

tq $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $x \to L(x,y)$ est linéaire

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ borné Alors $f(x) = \sup_{y \in B} L(x,y)$ est

~~sous~~ additive $y \in B$

$g(x) = \inf_{y \in B} L(x,y)$ est ~~sous~~ additive

D/ Soit $x, x' \in (\mathbb{R}^n)^2$ et soit $y \in B$

On a ~~$L(x+x', y) \leq f(x) + f(y) \leq f$~~

$L(x+x', y) = L(x,y) + L(x',y) \leq f(x) + f(x')$

$$\underbrace{\sup_{y \in B} L(x+x', y)}_{f(x+x')} \leq f(x) + f(x')$$

$p > 1$

On va mq $\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0,+\infty[^n$
$\forall (y_1, \dots, y_n) \in]0,+\infty[^n$ $\left| \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \right.$

i) Soit $q > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. soit $A = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} z_i^q = 1\}$

$$\text{Alors } \sup_{z_i \in A} \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \; (?)$$

$$\text{D/ } * \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \Big(\underbrace{\sum z_i^q}_{1}\Big)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$$

$** \; z_i = \lambda x_i^{p-1} \quad \lambda > 0$

$z_i^q = \lambda^q x^{(p-1)q} \quad \lambda > 0$ | pour $\sum_{i=1}^{n} z_i^q = 1$

$z_i^q = \lambda^q x^{(p-1)q} = \lambda^q x_i^p$ | on prend $\lambda = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/q}}$

$$\text{il vient } \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i^p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$$

(ii) il en resulte que f_p fct $x_1 \dots x_n$
$\underbrace{x_1 \dots x_n}_{>0} \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ est sous additif.

II – inégalité de Jensen (AHP)

Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, convexe $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ alors

① il existe une famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de fonctions affines tq $g = \sup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda$

② $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f$

① Soit $\varphi_a : x \to g(a) + g'_g(a)(x-a)$

si $x = a$ $\varphi_a(a) = g(a)$

Si $x < a$ $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \varphi_a(x) \leq g'_g(a)$

si $x > a$ ——— $\geq g'_d(a) \geq g'_g(a)$

Ainsi $\varphi_a \leq g$ | obs1 $h \leq g$ car toutes les φ_a ...

Soit $h = \sup_{a \in \mathbb{R}} \varphi_a$ | obs2 Soit $a \in \mathbb{R}$ $h(a) \geq \varphi_a(a) = g(a)$

$h \geq g$

φ_a étant affine $\varphi_{a'}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_{a'}(g(t))$

$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_{a'}(g(t))\,dt$

$(\varphi_{a'}(y) = \alpha y + \beta)$

de là $\varphi_{a'}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(g(t))\,dt$ (...)

sup $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(g(t))\,dt$ majorant

Inégalité et v.a finies $X : \Omega \to E$ fini

probabilisé fini

~~Inégalité et v.a finies~~

~~E fini X E~~

tq $\forall x \in E$ $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$

on pose $P(X=x) = P(X^{-1}(\{x\}))$

$E(X) = \sum_{x \in E} P(X=x) \cdot x$

si f est convexe : $f(E(X)) = f\left(\sum_{x \in E} P(X=x)x\right)$

$$\leq \sum_{x \in E} P(X=x) f(x) = E(f \circ X)$$

convexité

(4.4) X, Y deux VA à valeurs $\in E\ (\subset \mathbb{R})$

$$|E(XY)| \overset{CS}{\leq} E(X^2)^{1/2}\, E(Y^2)^{1/2}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} E(|X|^p)^{1/p} \times E(|Y|^q)^{1/q}$$

$p, q > 0 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$